Esercizi di Elementi di Teoria degli Insiemi seconda parte

Davide La Manna (544756)

10 giugno 2018

Esercizio 1. *$(A, <)$ insieme ordinato finito $\Rightarrow (A, <) \cong (n, \in)$ con $n = |A|$*

Dimostrazione. Si procede per induzione su n.
$n = 0$ è vera a vuoto.
$P(n) \Rightarrow P(n+1)$: per ipotesi induttiva, sia $M \in A$ il massimo tra gli elementi di A, esiste un isomorfismo $\phi : (A \setminus \{M\}, <) \to (n, \in)$, allora $\psi := \phi \cup (M, n)$ è un isomorfismo d'ordine da A in $n + 1$ $\square$

Esercizio 2. *Dimostrare che $(\omega, \in)$ è un buon ordine*

Dimostrazione. Vogliamo dimostrare che ogni sottoinsieme di ω ha minimo Per assurdo, sia $X \subseteq \omega$ un sottoinsieme non vuoto senza minimo, denotiamo con $\leq$ " $\in$ *oppure* $=$ " e sia $P(n) : \forall y \leq n, y \notin X$.
Logicamente $P(0)$ è vera, altrimenti X ammetterebbe minimo, supponiamo vera $P(n)$, se $n+1$ appartenesse a X allora sarebbe il minimo cercato, di conseguenza anche $P(n+1)$ è vera, ma allora in virtù del principio d'induzione, la proprietà sarà vera $\forall n \in \omega$ quindi $X = \emptyset$[1]. $\square$

Esercizio 3. *Mostrare che $(\omega, \in)$ è il più piccolo insieme bene ordinato infinito.*

Dimostrazione. Dato $(A, <)$ bene ordinato con A infinito, Costruiamo una funzione che mantiene l'ordine per ricorsione numerabile:

$$\phi(0) = \min A; \quad \phi(n+1) = \min(A \setminus \{\phi(0), ..., \phi(n)\});$$

Chiaramente tale funzione è ben definita perchè ω è il più piccolo insieme infinito $\square$

[1] In generale, notiamo che, dato $(X, <)$ insieme ordinato in cui vale il principio d'induzione, allora $(X, <)$ è ben ordinato.

Esercizio 4. *Sia $(A,<)$ un insieme ordinato. Dimostrare che se ogni suo segmento iniziale S diverso da A è generato da un $a_S \in A$, allora $(A,<)$ è ben ordinato.*

Dimostrazione. Per ipotesi $A \setminus S \neq \emptyset$ allora $a_s := \min(A \setminus S)$ verifica le proprietà richieste, infatti $\forall x < a_s$, $x \notin A \setminus S \Rightarrow x \in S$ e se $x \in S \Rightarrow x < a_s$ altrimenti per le proprietà di segmento iniziale, si avrebbe che anche $a \in S$. □

Esercizio 5. *Sia $\langle A_i \mid i \in \mathbb{N}\rangle$ una sequenza d'insiemi totalmente ordinati tale che $\forall i < j \in \mathbb{N},\ A_i \subseteq A_j$, allora $\bigcup_n A_n$ è totalmente ordinato*

Dimostrazione. Siano $x, y \in \bigcup_n A_n$ Allora esisteranno WLOG $i < j \in \mathbb{N}$ tale che $x \in A_i$ *e* $y \in A_j$ dunque quanto ipotizzato x e $y \in A_j$ il quale è ben ordinato.
Dalla generalità di quanto osservato segue che $\bigcup_n A_n$ è totalmente ordinato (con la relazione d'ordine data dall'unione insiemistica di tutte le coppie ordinate)[2]. □

Esercizio 6. *Sia $\langle A_i \mid i \in I\rangle$ una catena di buoni ordini tale che $(i < j \Rightarrow A_i$ è segmento iniziale di $A_j)$ Allora $\bigcup_{i \in I} A_i$ è bene ordinato*

Dimostrazione. Dall'esercizio 6 sappiamo che $\bigcup_{i \in I} A_i$ è totalmente ordinato, per dimostrare che sotto queste ipotesi è anche un buon ordine consideriamo $X \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$ non vuoto. Sia $x \in X$, se $x = \min X$ concludo che ha minimo altrimenti dato A_i *t.c.* $x \in A_i \forall y < x\ \exists j < i$ *t.c.* $y \in A_j$ (che sarà un segmento iniziale di A_i che essendo ben ordinatosarà generato da un certo $y < \gamma \leq x \in A_i$) oppure $y \in A_i$ Possiamo considerare quindi l'insieme $X' := \{y < x \mid y \in X\} \subseteq A_i$ il quale minimo coinciderà col minimo di X essendo ogni elemento di X' minore di x. □

Esercizio 7. *Siano $\oplus, \otimes$ addizione e moltiplicazione tra buoni ordini. mostrare che:*

1. *trovare controesempi alla commutatività di $\oplus$ e $\otimes$*
2. *$\oplus$ è associativa a meno di isomorfismo*
3. *$\otimes$ è associativa a meno di isomorfismo*
4. *dire se valgono proprietà distributive a destra o a sinistra.*

Dimostrazione. 1. Mostriamo che $ot(\{1\} \oplus \omega) \neq ot(\omega \oplus \{\star\})$ e similmente $ot(\{1,2\} \otimes \omega) \neq ot(\omega \otimes \{1,2\})$:
$ot(\{\star\} \oplus \omega) = ot(\omega)$, basta considerare l'isomorfismo d'ordine ϕ
$\phi(\{\star\}) = 0; \quad \phi(n) = n+1;$
$ot(\omega \oplus \{\star\}) > ot(\omega)$, infatti, supponendo di voler trovare un isomorfismo d'ordine tra $\omega \oplus \{\star\}$, una volta deciso dove mandare $\{\star\}$, per mantenere l'ordine dovrò mandare tutto ω alla sinistra di $\{\star\}$ il che è impossibile perchè dovrei mandare bigettivamente un insieme infinito in un insieme finito, chiaramente esiste una funzione iniettiva che mantiene l'ordine d'ordine tra ω e $\omega \oplus \{\star\}$ chè è l'inclusione (infatti ω è proprio il segmento iniziale generato da $\{\star\}$).

[2]Si nota che in realtà il teorema vale per qualsiasi I-sequenza

Per il secondo ci basta dimostrare che $ot(\{1,2\}\otimes\omega) = ot(\omega)$ in quanto chiaramente $ot(\omega\otimes\{1,2\}) = ot(\omega\oplus\omega) > ot(\omega\oplus\{\star\}) > ot(\omega)$. Per farlo semplicemente osserviamo che, essendo ω isomorfo all'insieme dei numeri pari/dispari, posso mandare la coppia $(1,0)$ in 0 e la coppia $(2,0)$ in 1 e induttivamente, dopo aver deciso dove mandare le successive $2k$ coppie, la coppia $(1,k+1)$ nell'k+1-esimo pari e la coppia $(2,k+1)$ nell'k+1-esimo dispari.

2. L'associatività è chiaramente vera se A,B,C sono disgiunti, infatti insiemisticamente $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ e l'ordine indotto è lo stesso per entrambi, ma noi sappiamo che possiamo sempre ridurci al caso disgiunto (a meno di insiemi isomorfi (e questo è una banale conseguenza del fatto che posso riattaccare due isomorfismi d'ordine a uno solo sulla somma facendo l'unione insiemistica dei due isomorfismi appositamente ritoccati sostituendo gli elementi delle coppie ordinate con le coppie del prodotto cartesiano che fornisce la definizione)) quindi a meno di isomorfismo il problema è dimostrato (altrimenti sarebbe chiaramente falso.)

3. Chiaramente il prodotto cartesiano non è mai associativo quindi la dimostrazione non può essere simile a quella di prima, però si noti che $(a,(b,c)) <' (a',(b',c')) \Leftrightarrow ((a,b),c) <'' ((a',b'),c')$ Perchè continua a "contare" di più quello più a destra. L'isomorfismo d'ordine cercato sarà $\phi(a,(b,c)) = ((a,b),c)\ \forall a \in A, b \in B, c \in C$ che è bigettivo chiaramente e mantiene l'ordine per quanto osservato.

4. i controesempi sopra ci forniscono un rapido controesempio in cui non vale la proprietà associativa a sinistra:
$(\{0\} \oplus \{1\}) \otimes \omega \cong \{0,1\} \otimes \omega \cong \omega < \omega \oplus \omega \cong (\{0\} \otimes \omega) \oplus (\{1\} \otimes \omega)$
mentre vale la proprietà distributiva a destra ovvero: $A \otimes (B \oplus C) \cong (A \oplus B) \otimes (A \oplus C)$.
Consideriamo $\forall a \in A, b \in B, c \in C$ $f(a,(b,0)) = ((a,b),0)$ e $f(a,(c,1)) = ((a,c),1)$ che è un isomorfismo per lo stesso motivo di sopra.

□

Esercizio 8. *Siano $A, B \subset \mathbb{R}$ buoni ordini, mostrare che $A+B := \{a+b \mid a \in A,\ b \in B\}$ è un buon ordine.*

Dimostrazione. Ci si riferisce ad A e B ordinati rispetto all'ordine di $\mathbb{R}$ ristretto agli elementi degli insiemi e con tale ordine $A + B$ continua a restare totalmente ordinato in quanto sottoinsieme di $\mathbb{R}$.
Vogliamo dimostrare che $X \subseteq A + B$ si scrive come $X = A' + B'$ con $A' \subseteq A$ e $B' \subseteq B$ e che sarà $\min(A') + \min(B')$ indipendentemente dalla scelta di A' e B'. Per prima cosa mostriamo che non esistono sottoinsiemi di $A + B$ non scrivibili come somma di sottoinsiemi di A e B, infatti ogni elemento di $A + B$ deve essere scrivibile come somma di elementi in A e in B per definizione. Supponiamo esistano $A', A'' \subseteq A$ e $B', B'' \subseteq B$ tale che $X \subseteq A + B$ $X \neq \emptyset$ e $X = A' + B' = A'' + B''$ e $\min(A') + \min(B') \neq \min(A'') + \min(B'')$. A meno di rinominare gli insiemi possiamo supporre $\min(A') + \min(B') \not< \min(A'') + \min(B'')$ ma dato che X si scrive come sopra, dovrebbe essere possibile scrivere

$\min(A') + \min(B')$ solamente mediante elementi di A'' e B'' che non è possibile per la disuguaglianza. [3]

$\square$

Esercizio 9. *Sia $\phi : A \to A$ e $(A, <)$ ben ordinato funzione d'ordine, allora $\forall a \in A \;\; a \leq \phi(a)$*

Dimostrazione. Se per assurdo non fosse vero, esisterebbe
$x = \min\{a \in A \mid \phi(a) < a\} := B$ ma dato che $\phi(x) < x$, $\phi(\phi(x)) < \phi(x)$ essendo una funzione d'ordine. e dato che anche $\phi(x) \in B$ verrebbe violata la minimalità di x.

$\square$

Esercizio 10. *Sia $(A, <)$ bene ordinato e sia $a \in A$ allora $A \not\cong A_a$*

Dimostrazione. se esistesse un isomorfismo d'ordine si avrebbe in particolare $\phi(a) \in A_a$ dunque $\phi(a) < a$ contro (ex 9).

$\square$

Esercizio 11. *Sia $(A, <)$ bene ordinato e siano $a' < a'' \in A$, allora $A_{a'} \not\cong A_{a''}$*

Dimostrazione. In quanto $A_{a'}$ sarebbe un segmento iniziale di $A_{a''}$ che sappiamo per (ex 10) non poter essere isomorfo ad $A_{a''}$ $\square$

Esercizio 12. *Sia $\varphi : (A, <) \to (B, <)$ isomorfismo d'ordine allora $\forall a \in A$ φ può essere ristretta ad un isomorfismo d'ordine tra A_a e $B_{\varphi(a)}$*

Dimostrazione. Dobbiamo controllare solo la surgettività della mappa essendo la restrizione di una funzione d'ordine una funzione d'ordine. Essendo un isomorfismo d'ordine $a < \varphi(a)$ dunque $\varphi(A_a) \subseteq B_{\varphi(a)}$. dato $b < \varphi(a)$ dalla surgettività di φ segue che $\exists a' \in A$ t.c. $b = \varphi(a')$ dunque deve essere anche $a' < a$ perchè funzione d'ordine. Dunque sarà anche $\varphi(A_a) \supseteq B_{\varphi(a)}$ $\square$

Esercizio 13. *Ogni insieme bene ordinato $(A, <)$ finito è isomorfo ad un unico $(n, \in)$ con $n \in \omega$*

Dimostrazione. La tesi segue da (ex 1), dato che 2 naturali distinti, per costruzione avranno cardinalità distinta. $\square$

Esercizio 14. $(\omega, \in)$ *è il più piccolo buon ordine infinito, cioè:*

1. *$ot(n) \leq ot(\omega)$*

2. *$ot(\omega) \leq ot(A)$ per ogni A buon'ordine infinito.*

Dimostrazione.

[3] Notiamo che anche in questo caso non abbiamo sfruttato da nessuna parte le proprietà particolari di $\mathbb{R}$ come insieme

1. è chiaramente vero essere n un segmento iniziale proprio di ω
2. (ex 3) (non usa la tricotomia tra insiemi ben ordinati)

$\square$

Esercizio 15. *Sia α un ordinale. Sia $x \in \alpha$, allora x è un ordinale.*

Dimostrazione. Essendo α un insieme transitivo, abbiamo che $x \subseteq A$ ed essendo ben ordinato α lo sarà in particolare x. supponiamo $z \in y \in x$, vogliamo mostrare che $z \in x$.Di certo $y \in \alpha$ ma allora anche $z \in \alpha$, ma alpha è totalmente ordinato, allora al suo interno vale la proprietà transitiva insiemistica quindi $z \in x$. $\square$

Esercizio 16. *Se α e β sono ordinali, allora $\alpha \in \beta \Leftrightarrow \alpha \subsetneq \beta$.*

Dimostrazione. La proprietà $\alpha \in \beta$ si scrive come $\alpha = \beta_\alpha$ ma β è sempre maggiore di un suo segmento iniziale proprio. Se $\alpha \subsetneq \beta$, dato che possiamo escludere per la transitività degli ordinali $\beta \in \alpha$(altrimenti seguirebbe il contenimento opposto) sarà $\alpha \in \beta$ $\square$

Esercizio 17. *Se β è un ordinale, allora $\gamma = \beta \cup \{\beta\}$ è il minimo degli ordinali maggiori di β.*

Dimostrazione. se $\beta' \in \beta \in \gamma$ allora $\beta' \in \gamma$ per costruzione quindi la transitività si mantiene. Inoltre a suo tempo si è dimostrato che è un buon'ordine e ha senso scrivere $ot(\gamma) = ot(\beta) + 1$ perchè non esistono insiemi con tipi d'ordine intermedi. In analogia coi naturali ha quindi ha senso la definizione di ordinale successore $\square$

Esercizio 18. *L'ordinale α ha massimo se e solo se esiste un ordinale β con $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$*

Dimostrazione. Se α ha massimo, chiamato β tale massimo si ha che $\forall \gamma \in \alpha, \gamma \in \beta \in \alpha$ o $\gamma = \beta \in \alpha$ da cui $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$. Viceversa, dato $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$, si verifica che $\forall \gamma \in \alpha, \gamma \in \beta \in \alpha$ o $\gamma = \beta \in \alpha$ quindi β è il massimo $\square$

Esercizio 19. *Se X è un insieme di ordinali, allora $\bigcup X$ è un ordinale. Inoltre $\bigcup X = \sup X$*

Dimostrazione. Proviamo la transitività di $\bigcup X$: $x \in y \in S$ ma esisterà un ordinale α tale che $x \in y \in \alpha$ per cui $x \in \alpha$ ma $\alpha \in X$ allora $x \in \bigcup X$. Se $Y \subset \bigcup X$ e Y è non vuoto, allora $\exists y \in Y$, se y è minimo ho concluso, altrimenti esisterà α ordinale tale che $y \in \alpha$ notiamo che se $z < y (z \in y)$ per transitività $z \in \alpha$ allora non è restrittivo ai fini della ricerca del minimo considerare $y \subset \alpha \cap Y$ che essendo un sottoinsieme di α ammetterà minimo il quale sarà minimo anche per Y.[4]
Notiamo che l'ordine tra ordinali coincide (ex 16) con l'inclusione. allora il sup coinciderà con l'unione. $\square$

[4]in realtà bastava mostrare che gli elementi di un ordinale sono ordinali quindi per l'esercizio 22 $\bigcap X$ e $\bigcup X$ sono ordinali

Esercizio 20. *Se $X \neq \emptyset$ è un insieme di ordinali, allora $\bigcap X$ è un ordinale e $\bigcap X = \min X$*

Dimostrazione. Di certo sarà $\bigcap X$ un buon ordine essendo sottoinsieme di un buon'ordine. È transitivo, infatti sia $a \in b \in \bigcap X$ allora per ogni ordinale α tale che $a \in b \in \alpha$ allora $a \in b \in \bigcap X$ la conclusione che $\bigcap X = \min X$segue semplicemente dal fatto che è un inf per quanto osservato ed è un minimo perchè, essendo $\bigcup X =: S$ un ordinale X è un sottoinsieme di $S + 1$ $\square$

Esercizio 21. *La collezione degli ordinali con $\in$ è bene ordinato, cioè:*

1. *per ogni α ordinale si ha $\alpha \notin \alpha$;*
2. *per ogni α e β ordinali, $\alpha \in \beta \Rightarrow \beta \notin \alpha$;*
3. *Per ogni α, β, γ ordinali $(\alpha \in \beta \quad e\ \beta \in \gamma) \to \alpha \in \gamma$;*
4. *Per ogni α, β, γ ordinali vale una ed una sola delle seguenti: $\alpha \in \beta$, $\alpha = \beta$, $\beta \in \alpha$;*
5. *Ogni insieme non vuoto di ordinali ammette un elemento minimo.*

Dimostrazione.
1. Se α fosse un elemento di α allora, essendo un insieme ordinato, dovrebbe valere $\alpha \notin \alpha$
2. segue semplicemente dalla proprietà 4.
3. banale dalla transitività
4. stiamo riscrivendo quando già visto con i buoni ordini ricordando che se esiste un isomorfismo tra ordinali allora esso sarà l'identità.
5. dimostrato sopra.

$\square$

Esercizio 22. *Se X è un insieme transitivo di ordinali, allora X stesso è un ordinale.*

Dimostrazione. Per la tricotomia degli ordinali X è totalmente ordinato, verifichiamo che sia un buon ordine. Prendiamo $Y \subseteq X$ non vuoto. Sia $y \in Y$ se y è minimo ci fermiamo, altrimenti esisterà un elemento in $y \cup Y$ ma y è un ordinale quindi sia $z = \min y \cup Y$. Tale z è un minimo globale perchè minore di ogni elemento di Y. $\square$

Esercizio 23. *La classe* $\textbf{SING} := \{x \mid |x| = 1\}$ *non è un insieme.*

Dimostrazione. dato un qualsiasi insieme, esiste sempre il suo singoletto. Quindi se **SING** fosse un insieme, lo sarebbe anche $\bigcup \textbf{SING} = \mathbb{U}$ che è la classe universo. $\square$

Esercizio 24. *La classe dei buoni ordini non è un insieme.*

Dimostrazione. A tal proposito potremo usare l'esercizio 23 per cui un insieme finito è sempre ben ordinabile ma preferiamo dimostrare che La classe **ORD** $:= \{\alpha \mid \alpha$ è un ordinale$\}$ non è un insieme[5]. Se **ORD** fosse un insieme, sarebbe un insieme transitivo perchè insiemi di ordinali sono ordinali, ma allora per l'esercizio 22 sarebbe un ordinale lui stesso quindi si avrebbe l'assurdo **ORD** $\in$ **ORD** □

Esercizio 25. *Dimostrare che gli ordinali diversi da $\emptyset$ sono solo di due tipi:*

1. *gli ordinali α aventi massimo e della forma $\alpha = \beta + 1$ con β ordinale;*
2. *gli ordinali che non hanno massimo e sono del tipo $\lambda = \bigcup_{\gamma<\lambda} \gamma$*

Dimostrazione. Sappiamo già che se un ordinale ha massimo allora si scrive nella forma 1). Vogliamo far vedere che ogni ordinale che non ha massimo si scrive come: $\lambda = \bigcup_{\gamma<\lambda} \gamma$. Sia λ un ordinale che non ha massimo. Se $x \in \bigcup_{\gamma\in\lambda} \gamma$ allora $\exists\tilde{\gamma} \in \lambda$ t.c. $x \in \tilde{\gamma}$ quindi per transitività $x \in \lambda$. Se $x \in \lambda$, x non può essere il massimo, allora $\exists\tilde{\gamma} \in \lambda$ con $x \in \tilde{\gamma}$ quindi $x \in \bigcup_{\gamma\in\lambda} \gamma$. Per finire notiamo che se λ avesse massimo $\tilde{x}$ allora $\forall\gamma \in \lambda$, $\gamma \in x$, per la tricotomia degli ordinali dunque $\tilde{x} \notin \bigcup_{\gamma\in\lambda} \gamma$ □

Esercizio 26. *Dimostrare per induzione transfinita che $0 + \alpha = \alpha$ per ogni α ordinale.*

Dimostrazione.

- $\alpha = 0$: $0 + 0 = 0$
- $\alpha = \beta + 1$: $0 + \beta + 1 = (0 + \beta) + 1 = \beta + 1 = \alpha$
- $\alpha = \bigcup_{\gamma\in\lambda} \gamma$: $0 + \alpha = \bigcup_{\gamma\in\lambda}(0 + \gamma) = \bigcup_{\gamma\in\lambda} \gamma = \alpha$

□

Esercizio 27. *Dimostrare per induzione transfinita che $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$ per ogni α, β, γ ordinali.*

Dimostrazione. per induzione su γ:

- $\gamma = 0$: $(\alpha + \beta) + 0 = \alpha + \beta =$[6] $\alpha + (\beta + 0)$
- $\gamma = \theta+1$: $(\alpha+\beta)+(\theta+1) = ((\alpha+\beta)+\theta)+1 = (\alpha+(\beta+\theta))+1 = \alpha+((\beta+\theta)+1) = \alpha + (\beta + (\theta + 1))$
- $\gamma = \lambda$ limite: $(\alpha+\beta)+\lambda = \bigcup_{\delta\in\lambda}(\alpha+\beta)+\delta = \bigcup_{\delta\in\lambda} \alpha+(\beta+\delta) = \alpha+\bigcup_{\delta\in\lambda}(\beta+\delta) = \alpha + (\beta + \bigcup_{\delta\in\lambda} \delta) = \alpha + (\beta + \lambda)$

□

[5] la quale è una sottoclasse propria della classe considerata che se fosse un insieme implicherebbe che anche quello considerato è un insieme ad esempio per separazione.

[6] l'uguaglianza può essere giustificata solo alla luce dell'esercizio 26

Esercizio 28. *Usando il lemma di Zorn dimostrare il teorema di zermelo*

Dimostrazione. Sia preso un insieme $X \neq \emptyset$ Vogliamo trovare un buon ordine su X, a tal proposito si considera l'insieme $Y := \{(Z, <_z) \text{ buon ordine} \mid Z \subseteq X\}$. Y è non vuoto perchè in esso è presente qualunque buon'ordine sui sottoinsiemi finiti di X (che sappiamo essere bene ordinati) In Y defininiamo un ordinamento: $(Z', <_{z'}) \prec (Z'', <_{z''})$ sse $(Z', <_{z'})$ è un segmento iniziale di $(Z'', <_{z''})$. Vediamo che per ogni catena $\mathbf{C}$ in Y, $C := (\bigcup_{(Z,<_z)\in\mathbf{C}} Z, \bigcup_{(Z,<_z)\in\mathbf{C}} <_z)$ è un maggiorante (stà nell'insieme in quanto è ben ordinato grazie ad (ex 6)) di conseguenza esisterà almeno un elemento massimale $(M, <_m)$. Se tale elemento non fosse X stesso allora sarebbe contenuto propriamente in X e quindi potrei estenderlo aggiungendo un elemento e rendendolo maggiore di tutti gli altri, il nuovo insieme risulterebbe ancora bene ordinato e avrebbe come segmento iniziale $(M, <_m)$ assurdo per la massimalità di $(M, <_m)$. □

Esercizio 29. *Usando il lemma di Zorn dimostrare l'assioma della scelta*

Dimostrazione. Dal lemma di Zorn abbiamo scoperto che è possibile ben ordinare qualsiasi insieme A, sia dunque dato un buon ordine su A, una funzione di scelta può essere quella che fà corrispondere ad ogni sottoinsieme di A il suo minimo. Alternativamente possiamo dimostrare direttamente l'assioma della scelta senza passare da Zermelo:
Sia $X \neq \emptyset$ vogliamo trovare una funzione $\phi : \mathcal{P}(X) \to X$ di scelta. A tal proposito si considera $Y := \{\psi \subseteq \mathcal{P}(X) \times X \mid \psi \text{ è funzione di scelta}\}$. Verifichiamo che Y è non vuoto, infatti è facile trovare una funzione di scelta per lo meno tra i singoletti. Definiamo un ordine su Y: $\psi_1 < \psi_2$ se ψ_2 "estende" ψ_1. anche in questo caso, per ogni catena $\mathbf{C}$ adotteremo come maggiorante (che come prima apparterrà all'insieme (e quindi alla catena)) $\psi_{\mathbf{C}} := \bigcup_{\psi\in\mathbf{C}} \psi$. Anche in questo caso avremmo che in Y esisterà almeno un elemento massimale ψ_m e se tale elemento non fosse definito in tutto $\mathcal{P}(X)$ sarebbe possibile estenderlo contro la massimalità quindi ψ_m è una funzione di scelta. □

Esercizio 30. *Usando il lemma di Zorn dimostrare che se A è un insieme infinito allora* $|A \times \{1, 2\}| = |A|$.

Dimostrazione. Chiaramente $|A| \leq |A \times \{1, 2\}|$(basta mandare A in (A,1)). Per ogni insieme A infinito, si considera come al solito
$Y := \{\psi : B \times \{1, 2\} \to B \mid \psi \text{ è iniettiva e } B \subseteq A\}$. Di certo Y sarà non vuoto infatti è stato dimostrato senza l'uso dell'assioma della scelta che $|\omega \times \{1, 2\}| = |\omega|$ (A è infinito quindi possiede un sottoinsieme numerabile). Anche in questo caso si usa l'ordine indotto dall' "estensione". Per ogni catena si prenda l'unione come sopra e si ottiene un maggiorante. sia $\psi_m : B \times \{1, 2\} \to B$ elemento massimale. Per il principio dei cassetti B deve essere infinito e abbiamo 2 possibili casi:

1. $|A \setminus B| < |\omega|$ in questo caso trovo un isomorfismo ϕ tra A e B. Riusciamo facilmente a costruirci una funzione iniettiva da $A \times \{1, 2\} \to A$ componendo ogni qual volta per ϕ che è quello che ci serviva

2. $|\omega| \leq |A \setminus B|$ Vediamo che è allora possibile estendere ψ_m in contraddizione con la sua massimalità. sia infatti $\phi : (B \cup \omega) \times \{1, 2\} \to (B \cup \omega)$ definita come unione tra ψ_m e la funzione che manda $(\omega, 1)$ nei pari e $(\omega, 2)$ nei dispari è l'estensione cercata.

□

Esercizio 31. *Siano α e β ordinali e sia λ ordinale limite. Si dimostri che: $\alpha \cdot \beta^\lambda = \bigcup_{\delta<\lambda} \alpha \cdot \beta^\delta$*

Dimostrazione. $\alpha \cdot \beta^\lambda = \bigcup_{\delta<\beta^\lambda} \alpha \cdot \delta = \bigcup_{\beta^\delta<\beta^\lambda} \alpha \cdot \beta^\delta = \bigcup_{\delta<\lambda} \alpha \cdot \beta^\delta$ Dove la prima uguaglianza vale perchè β^λ è sempre limite, la seconda per definizione di β^λ la terza per cancellazione. □

Esercizio 32. *Dimostrare che l'insieme di Cantor $\mathcal{C}$ ha cardinalità del continuo.*

Dimostrazione. Possiamo vedere l'insieme di Cantor nell'intervallo $[0, 1]$ come l'insieme di quei numeri il cui sviluppo decimale in base 3 in tale intervallo può essere espresso senza l'uso della cifra 1[7]. Chiaramente essendo $\mathcal{C} \subset [0, 1]$ allora $|\mathcal{C}| \leq \mathfrak{c}$. Ci resta quindi da trovare una funzione iniettiva da un insieme di cardinalità $\mathfrak{c}$ a $\mathcal{C}$. A tale scopo esaminiamo $[0, 1]_2$ l'insieme dei numeri in tale intervallo rappresentati in base 2. Vorremmo che ognuno di essi si scrivesse in modo unico come $0.a_1a_2a_3\ldots$, per fortuna è quasi vero, infatti in analogia con quello che succede nel sistema decimale, gli unici numeri che danno problemi sono un sottoinsieme dei numeri razionali, quei numeri che hanno definitivamente tutte le cifre uguali a 9 (nel sistema binario quelli che danno problemi sono quelli che terminano con tutte le cifre uguali a 1). Togliendo una quantità numerabile al nostro insieme continuiamo ad avere la cardinalità del continuo.
La funzione cercata sarà $\psi : \sum_{n>0} a_n \cdot 2^{-n} \longmapsto \sum_{n>0} a_n \cdot 2 \cdot 3^{-n}$. questa funzione non farà altro che mandare gli "0" in "0" e gli "1" in "2" ed è chiaramente iniettiva perchè due sviluppi nell'immagine coincidono sse coincidono in partenza □

Esercizio 33. *Sia $\mathbf{F} : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ una funzione classe iniettiva con $\mathbf{A}$ classe propria. Mostrare che anche $\mathbf{B}$ è una classe propria.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $\mathbf{B}$ non sia una classe propria, allora $Im\mathbf{F}$ sarà un insieme. $\mathbf{F}_{\restriction Im\mathbf{F}}$ è invertibile, consideriamo la sua inversa $\mathbf{F}^{-1}_{\restriction Im\mathbf{F}}$ per separazione dunque sarà un insieme anche $\{\mathbf{F}^{-1}_{\restriction Im\mathbf{F}}(y) \mid y \in Im\mathbf{F}\} = \mathbf{A}$ contro le ipotesi. □

[7] Se si vuole motivare tale fatto, basti pensare che ad ogni passaggio della costruzione di $\mathcal{C}$ viene diviso l'intervallo in 3 e tolta la parte centrale, in tal modo viene sempre eliminata la cifra 1 del k-esimo elemento dello sviluppo ternario

Esercizio 34. *Sia G un gruppo. Sia $X \subseteq G$ un sottoinsieme non vuoto. Sia $\langle X \rangle$ il gruppo generato da X, ovvero il più piccolo gruppo contenuto in G contenente X.*

1. *Allora:*
$$\langle X \rangle = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$$
con $\begin{cases} X_0 = X \\ X_{n+1} = X_n \cup \{y^{-1} \mid y \in X_n\} \cup \{y_1 \cdots y_k \mid k \in \mathbb{N} \ \wedge y_1, \dots, y_k \in X_n\} \end{cases}$

2. *Supponiamo $|X| = \aleph_0$. Mostrare che allora $|\langle X \rangle| = \aleph_0$.*

Dimostrazione. 1. in analogia a quanto visto sui boreliani, per prima cosa si mostra che $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ è un sottogruppo: dati $x_1, \dots, x_k \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ allora $x_1 \cdots x_k \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$, infatti $\forall x_i \ \exists n_i$ t.c $x_i \in X_{n_i}$ per costruzione allora $x_1, \dots, x_k \in X_{\max\{n_i \ | \ 1 \le i \le n\} =: N}$ dunque $x_1 \cdots x_k \in X_{N+1} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Lo stesso identico ragionamento può essere fatto con gli inversi. Sia adesso H t.c. $X \subseteq H$ dunque $X_0 \subseteq H$ ma dato che, per la chiusura delle operazioni, se $X_k \subseteq H \Rightarrow X_{k+1} \subseteq H$ per induzione
$\forall n \in \mathbb{N} \ X_n \subseteq H \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H$

2. Anche qui ragioniamo per, induzione, stavolta numerabile, per dimostrare che $|X_n| = \aleph_0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. In questo modo otterremo che $\langle X \rangle$ è unione numerabile di pezzi di cardinalità numerabile quindi concludo[8].
Il passo base è vero per definizione. Supponiamo per ipotesi che $|X_n| = \aleph_0$, voglio dimostrare che $|X_{n+1}| = \aleph_0$, mi basta dimostrare che $k := \{y_1 \cdots y_k \mid k \in \mathbb{N} \ \wedge y_1, \dots, y_k \in X_n\}$ è numerabile (la cardinalità degli inversi è in bigezione con quella di X_n banalmente) per ottenere che $|X_{n+1}|$ sarà pari all'unione di un numero finito di pezzi numerabili quindi numerabile. Ma $|K| = \bigcup_{1 \le i \le \omega} |k_i|$ con $k_i := \{y_1 \cdots y_i \mid y_1, \dots, y_i \in X_n\}$ e $\forall i \in \omega \ |k_i| = |\aleph_0 \times i| = |\aleph_0|$. Quindi K sarà unione numerabile di pezzi di cardinalità numerabile e quindi pure lui sarà numerabile e con questo si conclude la dimostrazione.

□

Esercizio 35. *Mostrare che per ogni ordinale α vale $\alpha \le \aleph_\alpha$*

Dimostrazione. Procediamo per induzione trasfinita su α

- $\alpha = 0$: $0 \le \aleph_0$;
- $\alpha = \beta + 1$: per ipotesi induttiva $\beta + 1 \le \aleph_\beta + 1 \le$ [9]$\mathbb{H}(\aleph_\beta) = \aleph_{\beta+1}$

[8] Notiamo che non stiamo usando che la cardinalità di X è $\aleph_0$, infatti la cardinalità di X sarà sempre uguale a quella di $\langle X \rangle$ per motivi che verranno meglio spiegati nella teoria dei cardinali

[9] ACHTUNG! la disuguaglianza non è stretta in generale altrimenti non avrei nemmeno punti fissi

- $\alpha = \lambda$ limite: $\alpha = \bigcup_{\delta<\alpha} \delta \leq \bigcup_{\delta<\alpha} \aleph_\delta = \aleph_\alpha$

$\square$

Esercizio 36. *Dati μ e κ cardinali infiniti con $\mu \leq \kappa$, mostrare $|[\kappa]^\mu| = \kappa^\mu$.*

Dimostrazione. Ricordiamo che dati A e B t.c. $|A| = \kappa$ e $|B| = \mu$ allora $[\kappa]^\mu := \{C \subseteq A \mid |C| = B\}$. Dimstriamo le 2 disuguaglianze al seguente modo: Prendiamo $F : \kappa^\mu \to [\kappa]^{\leq\mu}$ $\quad F(f) = Im(f)$ questa funzione è surgettiva perchè essendo $\mu \leq \kappa$ posso decidere di mandare μ in qualsiasi sottoinsieme di cardinalità $\leq \mu$. Per la disuguaglianza inversa si osserva che che ogni $f : \mu \to \kappa$, $f \subseteq \mu \times \kappa$ ma $\mu \times \kappa \leq \kappa \times \kappa = \kappa$ (per AC) e $|f| = \mu$ dunque $f \in [\mu \times \kappa]^\mu$, $\kappa^\mu \leq |[\mu \times \kappa]^\mu| \leq |[\kappa \times \kappa]^\mu| = |[\kappa]^\mu|$ $\square$

Esercizio 37. *Dati α, γ, γ' ordinali con $\gamma < \gamma'$ verificare le seguenti proprietà*

1. $\alpha + \gamma < \alpha + \gamma'$
2. $\gamma + \alpha \leq \gamma' + \alpha$
3. *(quando $\alpha \neq 0$),* $\alpha \cdot \gamma < \alpha \cdot \gamma'$
4. *(quando $\alpha \neq 0$),* $\gamma \cdot \alpha \leq \gamma' \cdot \alpha$[10]

Dimostrazione. Mostriamo prima che dati $\gamma < \gamma'$ ordinali, non esiste nessun morfismo d'ordine $\psi : \gamma' \to \gamma$. Supponiamo che esista, consideriamo $i : \gamma \hookrightarrow \gamma'$ inclusione. la composizione di due morfismi d'ordine è un morfismo d'ordine allora anche $i \circ \psi : \gamma' \to \gamma'$ lo è dunque si ottiene che $i(\psi(\delta)) \geq \delta \ \ \forall \delta \in \gamma'$ ma questo è assurdo perchè prendendo un elemento non in γ si otterrebbe che l'immagine di un elemento di γ rispetto all'inclusione lo supererebbe. Notiamo che le asserzione (2),(4) e (1),(3) si dimostrano allo stesso modo, quindi verranno riportate solo 2 dimostrazioni.

1. dimostriamo la tesi per indizione trasfinita su γ':
   $\gamma' = 0 :$ la tesi è vera a vuoto.
   $\gamma' = \beta + 1 :$ $\gamma \leq \beta \Rightarrow \ \alpha + \gamma \leq \alpha + \beta < \alpha + \gamma'$
   $\gamma' = \lambda$ limite: $\exists \delta < \gamma'$ t.c $\gamma < \delta \Rightarrow \ \alpha + \gamma < \alpha + \delta < \alpha + \gamma'$

2. Se per assurdo fosse $\gamma + \alpha > \gamma' + \alpha$ notiamo che il seguente diagramma sarebbe commutativo:

$$\begin{tikzcd} \gamma + \alpha \arrow[r, dashed] \arrow[d, "\varphi"'] & \gamma' + \alpha \arrow[d, "\psi"] \\ \gamma \oplus \alpha \arrow[r, hook, "i"'] & \gamma' \oplus \alpha \end{tikzcd}$$

   questo ci porta facilmente ad un assurdo Perchè abbiamo dimostrato sopra che non possono esistere funzioni d'ordine da $\gamma + \alpha$ in $\gamma' + \alpha$

[10] risultati analoghi valgono per l'elevamento a potenza.

□

Esercizio 38. *Siano α e β due ordinali infiniti. Mostrare che allora $|\alpha^\beta| = max\{|\alpha|, |\beta|\}$.*

Dimostrazione. Ricordiamo che per α^β s'intende le funzioni a supporto finito da β in α che chiamiamo $Fun_0(\beta, \alpha)$, inoltre chiamiamo le funzioni a supporto finito uguale a k $Fun_0^k(\beta, \alpha)$. Ogni $f \in Fun_0^k(\beta, \alpha)$ è determinata da k coppie di α e β dunque $Fun_0^k(\beta, \alpha) \subseteq \alpha \times \beta \times k$ e dato che $Fun_0(\beta, \alpha) = \bigcup_{k\in\omega} Fun_0^k(\beta, \alpha) \subseteq \alpha \times \beta \times \omega$. passando alle cardinalità e ricordando che qualunque ordinale infinito ha cardinalità $>$ di $\aleph_0$ si ottiene $|\alpha^\beta| < max\{|\alpha|, |\beta|\}$. L'altra freccia è più semplice, basta considerare una funzione che a $\gamma \in \beta$ associ la funzione a supporto finito che vale 0 dappertutto e 1 in gamma e una seconda funzione che a $\gamma' \in \alpha$ associ la funzione a supporto finito che vale γ' in 0 e 0 altrove. □

Esercizio 39. *Dimostrare che la forma normale di cantor è unica.*

Dimostrazione. Supponiamo di avere 2 scritture:
$\alpha = \omega^{\delta_1} \cdot n_1 + \cdots + \omega^{\delta_k} \cdot n_k$ con $0 < n_1, \ldots, n_k \in \omega$ e $\gamma_1 > \cdots > \gamma_k$
$\alpha = \omega^{\gamma_1} \cdot m_1 + \cdots + \omega^{\gamma_h} \cdot m_h$con $0 < n_1, \ldots, n_k \in \omega$ e $\gamma_1 > \cdots > \gamma_k$
Possiamo assumere che $h \leq k$, Sia quindi $j := min\{x \leq h \mid (\gamma_x, m_x) \neq (\delta_x, n_x)\}$ allora $\omega^{\delta_j} \cdot n_j + \cdots + \omega^{\delta_k} \cdot n_k = \omega^{\gamma_j} \cdot m_j + \cdots + \omega^{\gamma_h} \cdot m_h$. Supponiamo che $\delta_j \neq \gamma_j$, possiamo assumere $\gamma_j < \delta_j$ dunque $\omega^{\delta_j} \cdot n_j + \omega^{\delta_{j+1}} \cdot n_{j+1} + \omega^{\delta_k} \cdot n_k < \omega^{\delta_j} \cdot n_j + \omega^{\delta_{j+1}} \cdot \omega + \cdots + \omega^{\delta_k} \cdot \omega \leq$ $\leq \omega^{\delta_j} \cdot n_j + \omega^{\delta_j} \cdot \omega = \omega^{\delta_j}(n_j + \omega) = \omega^{\delta_j + 1} \leq \omega^{\gamma_j} \cdot m_j + \cdots + \omega^{\gamma_h} \cdot m_h$ assurdo.
Lo stesso assurdo si riesce a trovare se suppongo che $n_j \neq m_j$ da cui concludo che le scritture devono coincidere per lo meno fino all'h-esima cifra, e se $h \neq k$, anche in questo caso si otterrebbe un assurdo perchè si avrebbe $0 = (roba > 0)$ per il confronto a destra. □

Esercizio 40. *Mostrare che la definizione di somma e prodotto tra cardinali è ben definita.*

Dimostrazione. Sia data una sequenza $\langle \kappa_i \mid i \in I \rangle$ di cardinali e due sequenze $\langle A_i \mid i \in I \rangle$ e $\langle B_i \mid i \in I \rangle$ di insiemi con $|A_i| = |B_i| = k_i$ $\forall i \in I$ e $A_i \cap A_j = B_i \cap B_j = \emptyset$ $\forall i, j \in I, i \neq j$ Vogliamo dimostrare che

$$|\bigcup_{i\in I} A_i| = |\bigcup_{i\in I} B_i|$$

. la bigezione cercata sarà semplicemente $\bigcup_{i\in I} f_i : \bigcup_{i\in I} A_i \to \bigcup_{i\in I} B_i$ dove ogni f_i è una bigezione da A_i in B_i. è una buona definizione, ovvero riesco a prendere una bigezione per ogni insieme indicizzato in I perchè per AC $\prod_{i\in I} F_i$ è non vuoto (dove ogni F_i è l'insieme di tutte le bigezioni da A_i in B_i) □

Esercizio 41. *Siano κ un cardinale e I un insieme. Mostrare che allora valgono i seguenti fatti (intendendo le operazioni di somma e prodotto infiniti tra cardinali):*

1. $\sum_{k<I} \kappa = \kappa \cdot |I|$

2. $\prod_{k<I} \kappa = \kappa^{|I|}$

Dimostrazione. 1. Dato $|A| = \kappa$ allora $\forall i \in I$ gli insiemi definiti come $A \times \{i\}$ sono disgiunti e hanno una cardinalità che ci và bene. Al variare di $i \in I$ la loro unione dà proprio $A \times I$. Concludiano grazie all'(ex 40) perchè la scelta non dipende dal rappresentante che scegliamo per ogni insieme nella somma.

2. corrisponde semplicemente all'insieme delle I[11] sequenze di elementi di A tale che $|A| = \kappa$ che per definizione ha cardinalità $\kappa^{|I|}$

$\square$

Esercizio 42. *Mostrare che esiste una successione $\langle \kappa_i \mid i \in I \rangle$ non decrescente di cardinali infiniti, dove I è un ordinale infinito e*

$$\prod_{i \in I} \kappa_i \neq \left(\bigcup_{i \in I} \kappa_i \right)^{|I|}$$

Dimostrazione. Preliminarmente vogliamo trovare un cardinale $\kappa \geq \aleph_\omega^{\aleph_0}$ tale che $\kappa^{\aleph_0} > \kappa$. Ragioniamo per ricosione sfruttando il teorema di König al seguente modo:

$$\begin{cases} \nu_0 = \aleph_\omega^{\aleph_0} \\ \nu_{i+1} = \nu_i^+ \end{cases}$$

$$\kappa := \bigcup_{i \in \omega} \nu_i < \prod_{i \in \omega} \nu_{i+1} = \kappa^{\aleph_0}$$

Adesso prendiamo come ordinale $\omega + 1$ e come successione di cardinali:

$$\begin{cases} \kappa_i = \aleph_i \ \ i < \omega \\ \kappa_\omega = \kappa \end{cases}$$

$$\prod_{i \in \omega+1} \kappa_i = \prod_{i \in \omega} \kappa_i \cdot \kappa = \aleph_\omega^{\aleph_0} \cdot \kappa = \kappa < \left(\bigcup_{i \in \omega+1} \kappa_i \right)^{|\omega+1|} = \kappa^{\aleph_0}$$

$\square$

Esercizio 43. *Mostrare che esiste una successione $\langle \kappa_i \mid i \in \nu \rangle$ di cardinali infiniti, dove ν è un cardinale infinito e*

$$\prod_{i \in \nu} \kappa_i \neq \left(\bigcup_{i \in \nu} \kappa_i \right)^{\nu}$$

[11] osserviamo che questa volta non abbiamo problemi di esistenza da giustificare con AC perchè nessuno ci vieta di prendere i rappresentanti sempre uguali

Dimostrazione. prendiamo come cardinale ω e come successione di cardinali:

$$\begin{cases} \kappa_0 = \kappa \\ \kappa_i = \aleph_i \ \ 0 \neq i \in \omega \end{cases}$$

$$\prod_{i \in \omega} \kappa_i = \kappa < \left(\sup_{i \in \omega} k_i \right)^{\aleph_0} = \kappa^{\aleph_0}$$

□

Esercizio 44. *Mostrare che se* $\langle \kappa_i \mid i \in I \rangle$ *e* $\langle \nu_i \mid i \in I \rangle$ *sono successioni di cardinali infiniti tali che* $\forall i \in I$, $\kappa_i < \nu_i$

$$\sum_{i \in I} \kappa_i \leq \prod_{i \in I} \nu_i$$

Dimostrazione. Diamo per il momento per buono (ex 45), dalle ipotesi abbiamo le seguenti disuguaglianze:

$$\sum_{i \in I} \kappa_i \leq \sum_{i \in I} \nu_i \leq \prod_{i \in I} \nu_i$$

Dove la prima vale perchè esiste I-sequenza di inclusioni tra i vari $\kappa = |A_i|$ e $\nu = |B_i|$. Consideriamo l'insieme formato dall'immagine della I-sequenza data da AC e ne facciamo l'unione, possiamo prendere tutti gli insiemi disgiunti quindi alla fine otterremo una funzione iniettiva da $\bigcup_{i \in I} A_i$ in $\bigcup_{i \in I} B_i$. □

Esercizio 45. *Mostrare che se* $\langle \kappa_i \mid i \in I \rangle$ *è una successione di cardinali infiniti allora*

$$\sum_{i \in I} \kappa_i \leq \prod_{i \in I} \kappa_i$$

Dimostrazione. denotiamo con $\langle A_i \mid i \in I \rangle$ la sequenza d'insiemi tali che $\forall i \in I$, $|A_i| = \kappa_i$. Cerchiamo una funzione iniettiva

$$\varphi : \bigcup_{i \in I} A_i \to \bigtimes_{i \in I} A_i$$

Come al solito possiamo supporre (solo per semplicità) che gli insiemi siano tutti diversi allora troviamo $\forall i \in I$ una funzione iniettiva che è l'inclusione canonica

$$i_{A_i} : A_i \to \prod_{i \in I} A_i$$

per AC esiste una I-sequenza di funzioni iniettive e ne posso fare l'unione dell'immagine per ottenere

$$\bigcup_{i \in I} i_{A_i} =: \varphi : \bigcup_{i \in I} A_i \to \bigtimes_{i \in I} A_i$$

che è iniettiva e ben definita perchè abbiamo preso tutti gli insiemi diversi.[12] □

[12]questo discorso si adatta alla perfezione con quello fatto nel precedente esercizio che poteva essere completato direttamente nel caso generale

Esercizio 46. *Sia κ un cardinale. Mostrare che κ è un limite forte se e solo se $\exists\lambda$ cardinale limite tale che $\kappa = \beth_\lambda$.*

Dimostrazione. ($\Leftarrow$) Sia $\nu < \kappa \Rightarrow \exists\alpha < \lambda$ con $\nu < \beth_\alpha \Rightarrow 2^\nu \leq 2^{\beth_\alpha} = \beth_{\alpha+1} < \beth_\lambda$
($\Rightarrow$) La sequenza "beth" è illimitata perchè $\alpha \leq \beth_\alpha \forall\alpha$. prendiamo $\alpha := min\{\gamma \mid k < \beth_\gamma\}$. Alpha non può essere limite infatti se lo fosse allora $\kappa < \bigcup_{\gamma<\alpha} \beth_\gamma$ quindi $\kappa < \beth_{\gamma'(<\alpha)}$ contro la minimalità. Dunque $\alpha = \beta + 1$ e $\beth_\beta \leq \kappa < \beth_{\beta+1}$ se la disuguaglianza a destra fosse stretta allora, essendo κ limite forte, varrebbe $2^{\beth_\beta} = \beth_{\beta+1} < \kappa$, assurdo. Se β fosse successore si troverebbe un assurdo allo stesso modo violando stavolta quanto appena dimostrato ($\beth_\beta = \kappa$), il teorema è quindi dimostrato. $\square$

Esercizio 47. *Mostrare che esistono cardinali κ con la proprietà $\kappa = \beth_\kappa$ arbitrariamente grandi.*

Dimostrazione. Dato ν cardinale, costruiamo un cardinale che soddisfa tale proprietà per ricorsione numerabile:

$$\begin{cases} \kappa_0 = \beth_{\nu+1} \\ \kappa_{n+1} = \beth_{\kappa_n} \end{cases}$$

$$k := \bigcup_{i<\omega} \kappa_i$$

$$\kappa = \bigcup_{i<\omega} \kappa_i = \bigcup_{i<\omega} \kappa_{i+1} = \bigcup_{i<\omega} \beth_{\kappa_i} = \beth_\kappa$$ [13]

$\square$

Esercizio 48. *Mostrare che se $\kappa \neq \aleph_0$ è un cardinale fortemente inaccessibile, allora $\kappa = \beth_\kappa$.*

Dimostrazione. Mostriamo per induzione trasfinita che sotto queste ipotesi si ha che $\forall\alpha < \kappa$, $\beth_\alpha < \kappa$:

- $\alpha = 0$: sappiamo che $\beth_0 = \aleph_0 < \kappa$
- $\alpha = \beta + 1$ abbiamo $\beth_\alpha = 2^{\beth_\beta} < \kappa$ sfruttando l'ipotesi induttiva più il fatto che κ è limite forte.
- sia $\lambda < \kappa$ limite. $\beth_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} \beth_\alpha \leq \kappa$ perchè $\beth_\alpha < \kappa\ \forall\alpha < \kappa$ per la stessa ragione di sopra, inoltre, se valesse $\beth_\lambda = \kappa$ allora $\kappa = cof(\kappa) = cof(\beth_\lambda) =$ [14]$cof(\lambda)$ assurdo perchè $\lambda < \kappa$ e tra le ipotesi avevamo κ regolare.

Dunque $\beth_\kappa = \bigcup_{\alpha<\kappa} \beth_\alpha \leq \kappa \leq \beth_\kappa$ segue $\kappa = \beth_\kappa$ $\square$

Esercizio 49. *Sia $(X, <)$ totalmente ordinato $\Rightarrow cof(X, <)$ è un cardinale regolare.*

[13] notiamo che la dimostrazione è molto simile a quella sull'esistenza dei punti fissi della funzione aleph

[14] Essendo limite

Dimostrazione. Chiamiamo $cof(cof(X,<)) = \kappa$ e $cof(X,<) = \nu$ di certo vale $\kappa \leq \nu$, Supponiamo che sia $\kappa < \nu$. Per ipotesi $\exists f : \kappa \to \nu$ e $g : \nu \to X$ crescenti e illimitate. è ovvio che $g \circ f$ è crescente, è abbastanza ovvio che sia illimitata, infatti Fissato $x \in X \exists \alpha$ t.c $g(\alpha) > x$ e $\exists \beta$ t.c $f(\beta) > g(\alpha)$ di conseguenza, grazie alla crescenza, $(g \circ f)(\beta) > x$. □

Esercizio 50. *Sia $\approx$ la relazione di equivalenza su $\mathbb{R}$ t.c: $r \approx r' \Leftrightarrow r - r' \in \mathbb{Q}$. Dimostrare che $|\mathbb{R}/\approx| = \mathfrak{c}$*

Dimostrazione. sia $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\approx$ la proiezione canonica al quoziente. Grazie all'assioma della scelta (essendo surgettiva) posso concludere $|\mathbb{R}/\approx| \leq |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$. Per dimostrare la seconda disuguaglianza, vorremmo trovare $X \in \mathbb{R} \wedge |X| = \mathfrak{c}$ tale che $\forall x, y \in X$, $x - y \notin \mathbb{Q}$, questi elementi potranno essere mandati in modo iniettivo in $\mathbb{R}/\approx$ associandogli la loro classe di equivalenza. come visto nell'(ex 32) ad ogni sequenza indicizzata da ω di elementi tra 0 e 9 possiamo associare un $x \in A[0,1]$ in maniera iniettiva (scartado successioni definitivamente =9), sia $S := \langle 0 \leq x_i \leq 9 \mid i \in \omega \wedge \forall i \in \omega \ \exists \ j > i$ t.c. $x_j \neq 9\rangle$ che per non appesantire troppo la notazione indicheremo con $0, x_1x_2x_3...$ i suoi elementi. Possiamo mandare questo insieme in maniera iniettiva in quello i cui elementi sono: $0, x_10x_1x_200x_1x_2x_3000...$ (che chiamiamo S') l'insieme da cui siamo partiti, per le considerazioni fatte nell'(ex 32) ha cardinalità $\mathfrak{c}$, quindi pure quest'altro avrà cardinalità $\mathfrak{c}$ e gode delle proprietà da noi richieste, infatti nessun elemento non nullo può essere periodico perchè contiene successioni arbitrariamente lunghe di zeri (quindi non può $\in \mathbb{Q}$) e se $x, y \in S'$ t.c.$x - y \in \mathbb{Q}$) allora $x - y$ è periodico allora $x - y$ def=0 allora $x = y$ per costruzione e questo completa la dimostrazione. □

Esercizio 51. *sia $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0,1]$ una probabilità σ-additiva tale che i singoletti abbiano misura nulla e sia Y equipotente a X, allora $\exists \mu' : \mathcal{P}(Y) \to [0,1]$ con le stesse caratteristiche*

Dimostrazione. Sia fissata una bigezione $f : Y \to X$ e sia dato $A \subseteq Y$ allora possiamo definire μ' al seguente modo:$\mu'(A) = \mu(f(A))$. f mantiene le cardinalità quindi è ovvio che μ' così definita manda i singoletti in 0 e continua ad essere σ-additiva e di probabilità. □

Esercizio 52. *sia κ cardinale limite e ν cardinale e sia $\langle \alpha_i \mid i < \nu \rangle$ sequenza di ordinali illimitata in κ allora $\langle |\alpha_i| \mid i < \nu \rangle$ è illimitata in κ*

Dimostrazione. vogliamo che $\forall \mu < \kappa$ voglio trovare $\kappa_h = |\alpha_h| > \mu$ ma per ipotesi $\langle \alpha_i \mid i < \nu \rangle$ è illimitata in κ quindi $\exists \alpha_h > \mu \ \forall \mu \in \kappa$ dunque $\mu \in \alpha_h \Rightarrow \mu \subseteq \alpha_h$, passando alle cardinalità si ottiene la tesi. □

Esercizio 53. *Siano κ e ν cardinali tali che $\nu < cof(\kappa) \Rightarrow \kappa^\nu = \bigcup_{\mu<\kappa} \mu^\nu$*

Dimostrazione. Per def. si ha $\kappa^\nu = |Fun(\nu,\kappa)|$ ma per questioni di cofinalità, tutte queste funzioni saranno limitate quindi $|Fun(\nu,\kappa)| = |\bigcup_{\mu<\kappa} Fun(\nu,\mu)| = |\bigcup_{\mu<\kappa} \mu^\nu| \leq \sum_{\mu<\kappa} \mu^\nu = max\{\kappa, \sup \mu^\nu\} = \sup \mu^\nu$ perchè $\sup \mu^\nu \geq \sup \mu = \kappa$.
l'altra disuguaglianza segue banalmente dal fatto che $\sup \mu^\nu \leq (\sup \mu)^\nu = \kappa^\nu$ □

Esercizio 54. *Sia V_α insieme di von Neumann con α ordinale.*
Dimostrare che $\alpha \subseteq V_\alpha$ e $\alpha \notin V_\alpha$

Dimostrazione. Dimostriamo la prima tesi per induzione trasfinita su α

- $\alpha = 0$: la tesi è banalmente vera
- $\alpha = \beta + 1$: per ipotesi induttiva $\beta \subseteq V_\beta$ dunque $\alpha \subseteq V_\beta \cup \mathcal{P}(V_\beta) = \mathcal{P}(V_\beta) = V_{\beta+1}$
- $\alpha = \lambda$ limite: $\alpha = \bigcup_{\gamma<\alpha} \gamma$ (per ipotesi induttiva)$\subseteq \bigcup_{\gamma<\alpha} V_\gamma = V_\alpha$

supponiamo che esista $\alpha := \min\{\gamma \in \mathbf{ORD} \mid \gamma \in \ V_\gamma\}$

- $\alpha = 0$: si avrebbe che $\emptyset \in \emptyset$
- $\alpha = \beta + 1$: $\beta \in \alpha \in V_\alpha \Rightarrow \exists \delta \in \alpha$ t.c. $\beta \in V_\delta$ essendo $\delta \leq \beta \Rightarrow \beta \in V_\delta \subseteq V_\beta \Rightarrow \beta \in V_\beta$ contro la minimalità di α
- $\alpha = \lambda$ limite: Si arriva ad un assurdo allo stesso modo sfruttando la minimalità di α e la transitività dei V_α considerando che se $\alpha \in \bigcup_{\delta\in\alpha} V_\delta \Rightarrow \alpha \in V_{\delta'<\alpha}$

□

Esercizio 55. *Sia $V_{\omega+\alpha}$, dimostrare che $|V_{\omega+\alpha}| = \beth_\alpha$*

Dimostrazione. Anche in questo caso dimostriamo la tesi per induzione trasfinita su α

- $\alpha = 0$: $|V_\omega| = \aleph_0 = \beth_0$
- $\alpha = \beta + 1$: $|V_{\omega+\beta+1}| = |\mathcal{P}(V_{\omega+\beta})|$ che per ipotesi induttiva è proprio uguale a $2^{\beth_\beta} = \beth_{\beta+1}$
- $\alpha = \lambda$ limite: $|V_{\omega+\alpha}| = |\bigcup_{\theta<\alpha} V_{\omega+\theta}|$ (per hp ind)$= \bigcup_{\theta<\alpha} \beth_\theta = \beth_\alpha$

□

Esercizio 56. *Sia α un ordinale. Allora i seguenti sono equivalenti:*

1. *α ordinale, $\beta < \alpha \Rightarrow \ \beta \cdot \alpha = \alpha$*
2. *$\beta, \gamma < \alpha \Rightarrow \ \beta \cdot \gamma < \alpha$*
3. *$\alpha = \omega^{\omega^\delta}$ con δ ordinale*

Dimostrazione. $1 \Rightarrow 2$ $\ \beta \cdot \delta < \beta \cdot \alpha = \alpha$

$2 \Rightarrow 3$ Sia $\delta := \min\{\beta \mid \alpha < \omega^{\omega^\beta}\}$(l'insieme è non vuoto perchè ad esempio posso prendere come $\beta = \alpha + 1$). Come al solito per minimalità deve essere successore e ottengo: $\omega^{\omega^\delta} \leq \alpha < \omega^{\omega^{\delta+1}}$.

Per il teorema di divisione euclidea posso scrivere $\alpha = \omega^{\omega^\delta} \cdot \rho + \sigma$ (con $\sigma < \omega^{\omega^\delta}$). Supponiamo $\sigma \neq 0$ si avrebbe $\omega^{\omega^\delta} \cdot \rho < \alpha < \omega^{\omega^\delta} \cdot (\rho + 1)$ dunque $\rho + 1 > \alpha$ perchè altrimenti non sarebbe strettamente maggiore di α per la 2 (oppure $\omega^{\omega^\delta} = \alpha$ e avremmo concluso la dimostrazione) e $\rho < \alpha$ altrimenti ma questo porterebbe all'assurdo $\alpha < \alpha$ quindi $\sigma = 0$.

Adesso supponiamo $\rho > 1$ dunque si avrebbe $\omega^{\omega^\delta} < \alpha$, per chiusura si avrebbe anche $\sup_{n\in\omega} \omega^{\omega^\delta \cdot n} < \alpha$ ma questo è assurdo perchè $\alpha < \omega^{\omega^\delta \cdot \omega}$

$3 \Rightarrow 1$ Dimostriamo per induzione su δ

- $\delta = 0$ la tesi è vera perchè $\alpha = \omega$ e i suoi insiemi sono tutti finiti
- $\delta = \gamma + 1$ sarà $\beta < \omega^{\omega^{\gamma \cdot n}}$ dunque $\beta \cdot \omega^{\omega^{\gamma \cdot \omega}} \leq \omega^{\omega^{\gamma \cdot n}} \omega^{\omega^{\gamma \cdot \omega}} = \omega^{\omega^{\gamma \cdot (n+\omega)}} = \omega^{\omega^\delta}$. l'altra disuguaglianza è ovvia
- δ limite. se la dimostrazione sopra è giusta questa sarà pressocchè identica quindi la ometto.

$\square$

Esercizio 57. *Sia α ordinale, allora $\rho(\alpha) = \alpha$*

Dimostrazione. è una banale conseguenza dell'(ex 54), infatti di certo ho che $\rho(\alpha) \leq \alpha$, d'altro canto, se fosse $\gamma = \rho(\alpha) < \alpha$, allora $\alpha \in V_{\gamma+1} \in V_\alpha$ o $V_{\gamma+1} = V_\alpha$ $\square$

Esercizio 58. *Dimostrare che $\rho(x) = \sup\{\rho(y) + 1 \mid y \in x\}$*

Dimostrazione. Osserviamo subito che $\rho(x) + 1 = \min \alpha \mid x \in V_\alpha$.
Dato $y \in x \Rightarrow \subseteq V_{\rho(x)} \Rightarrow \rho(x) \geq \rho(y) + 1$ pertanto $\rho(x) \geq \sup\{\rho(y) + 1 \mid y \in x\}$. Se la disuguaglianza fosse stretta troviamo sempre un assurdo:

- $\rho(x) = 0$ non è possibile perchè $\geq$1
- $\rho(x) = \beta + 1$ dunque $\sup\{\rho(y) \mid y \in x\} \leq \beta$ dunque $\forall y \in x$, $y \in V_{\rho(y)+1} \subseteq V_\beta \Rightarrow y \in V_\beta \Rightarrow x \subseteq V_\beta$ contro la minimalità di $\rho(x)$.
- $\rho(x)$ limite: $\exists \theta < \rho(x)\ \forall y \in X y \in V_{\rho(y)+1} \subseteq V_\theta \Rightarrow x \in V_\theta$ contro la minimalità di $\rho(x)$

$\square$

Esercizio 59. *Per ogni β ordinale, se $x \subseteq y \in V_\beta$, allora $x \in V_\beta$*

Dimostrazione. La tesi segue dal fatto che dalla caratterizzazione del rango tramite il sup dei ranghi degli elementi si ha che $\rho(x) \leq \rho(y)$ (si fà il sup su meno roba) dunque a maggior ragione si avrà $x \in V_\beta$ $\square$

Esercizio 60. *Dimostrare* $(X, \in) \models$ *estensionalità* $\Leftrightarrow X$ *è transitivo.*

Dimostrazione. Individuiamo l'uguaglianza nella nostra teoria con il simbolo " $=$ " mentre col simbolo " $=_X$ " ci riferiamo all'uguaglianza nel modello in analisi. Supponiamo $(X, \in)$ transitivo e $a, b \in X$. Se $a = b \Rightarrow \forall t \in a,\ t \in b$ ma $t \in X$ allora $a =_X b$ Supponiamo adesso $a \neq b \exists t$ t.c $t \in a$ e $t \notin b$ dunque essendo $t \in X$, $a \neq_X b$.
Adesso supponiamo che valga $\forall a(\forall b(a = b \longleftrightarrow a =_X b))$ è chiaro che se ci fosse un $t \in a$ con $t \notin X$ allora $a \notin =_X$ e viceversa. $\square$